# **CAPITULO II:** Teoría de Números

**Ejercicio Introductorio:**

**I PARTE:** Rodrigo es un agricultor, y se dispone a comprar un terreno porque quiere sembrar en él diferentes productos. Le ofrecen terrenos con las siguientes áreas $A:151m^2, B:143m^2, C:161m^2$.

1. ¿Cuál debe escoger de manera que el área que utilizará para cada producto sea entera y la misma para todos?
2. Comprado el terreno de la pregunta anterior, decidió hacer un cambio de planes y piensa en otros productos para sembrar. Primero, aparta $8m^2$ como bodega. Ahora, ¿cuántos productos podría sembrar de manera que el área para cada producto sea entera y la misma para cada producto?

---

**II PARTE:** María tiene $12$ chocolates y $18$ confites y los quiere repartir en bolsas de manera que en cada bolsa haya la misma cantidad de chocolates y la misma cantidad de confites. No quiere que le sobren confites ni chocolates. Intenta buscar el mejor número de bolsas que podría tener.

1. Para los chocolates, ¿en cuántas bolsas podría repartirlos?

2. Para los confites, ¿en cuántas bolsas podría repartirlos?

3. ¿En cuántas bolsas es posible hacer ambas distribuciones al mismo tiempo?

4. Si quiere que la cada bolsa tenga la mayor cantidad de cada golosina, ¿cuál es el mejor número de bolsas?

---

**III PARTE:** Enrique tiene un perro y un gato. Al perro tiene comprarle comida cada $12$ días y al gato cada $18$. Supongamos que hoy le compro comida a ambos, y quiere saber cuándo tendrá que comprarle comida a los dos al mismo tiempo.

1. ¿Dentro de cuántos días tendrá que comprarle comida al perro? De al menos 6 posibilidades.

2. ¿Dentro de cuántos días tendrá que comprarle comida al gato? De al menos 6 posibilidades

3. ¿Dentro cuántos días coincidirán? De al menos 3 posibilidades.

4. ¿Cuándo será la próxima vez que coincidan?

# A. Divisibilidad y números primos

Cuando la división $b \div a$ es exacta, es decir tiene residuo $0$, decimos que $b$ **es múltiplo de** $a$.

Otras maneras de decir que $b$ es múltiplo de $a$, es decir que $a$ **es un factor** de $b$, $a$ **es un divisor** de $b$ o de la manera más común, $b$ **es divisible entre** $a$.

Los números naturales que sólo son divisibles por $1$ y por sí mismos se llaman **números primos**.

Por ejemplo, los números primos más pequeños son $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$.

Los números que tienen un divisor primo distinto a sí mismos se llaman **números compuestos.**

Por ejemplo, los números compuestos más pequeños son $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$.

- Los números $1$ y $0$ no son ni primos ni compuestos.

**Ejercicio A.** Conteste las siguientes preguntas

1. ¿Cuántos números son pares y primos al mismo tiempo?
2. Si $n$ es múltiplo de $7$ y $n$ es primo, ¿cuál es el valor de $n$?
3. ¿Puede un número primo terminar en $0$? ¿en $5$?
4. ¿Cuántos números primos hay menores que $20$?
5. Si hay $168$ números primos menores que $1000$, ¿Cuántos números compuestos hay menores que $1000$?
6. A una pareja de números primos tales que su diferencia es $2$ se les llama **primos gemelos**. Por ejemplo, $29$ y $31$. Encuentre otras cinco parejas de primos gemelos.
7. Encuentre cuatro números primos tales que la diferencia entre dos consecutivos aumente de dos en dos. Es decir, la diferencia entre los dos más pequeños es $2$, la diferencia entre los siguientes dos es $4$ etc.
8. **Criba de Eratóstenes:** La siguiente tabla permitirá encontrar los números primos que hay del $1$ al $100$. Primero tachamos en la tabla el número $1$ porque ya sabemos que no es primo. Luego, señalamos el $2$ como primo y empezamos contando de $2$ en $2$ tachando todos los múltiplos de $2$: $4, 6, 8 \ldots$.

A continuación, señalamos como primo el siguiente número sin tachar (el $3$) y empezamos contando de $3$ en $3$ tachando los números: $6, 9, 12, \ldots$. Observe que ya habrá números que fueron tachados antes. El siguiente número sin tachar es el $5$, lo señalamos, y repetimos el procedimiento hasta terminar la tabla. Cuando terminemos, los números señalados son los primos.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

¿Cuáles son los primos menores que $100$?

# B. Criterios de divisibilidad

### Ejercicio Introductorio B.

**I PARTE:** En la siguiente tabla conteste si el número dado es divisible por cada uno de los números en la columna. Para esto, dividiremos el número entre el posible factor. Además, en las últimas tres columnas conteste lo solicitado.

| Número | Divisible por 2 | Divisible por 3 | Divisible por 5 | Divisible por 11 | La última cifra | La suma de las cifras | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 909 | | | | | | | |
| 606 | | | | | | | |
| 5995 | | | | | | | |
| 8281 | | | | | | | |
| 253 | | | | | | | |
| 23 430 | | | | | | | |

**II PARTE:** En la columna *, debe completarse la suma de las cifras en posición impar menos la sumas de las cifras en posición par.

Por ejemplo, para el número $64955$, primero enumeramos las cifras así: $\overset{1}{6}\overset{2}{4}\overset{3}{9}\overset{4}{5}\overset{5}{5}$, la suma de las cifras en posición impar es: $I = 6+9+5 = 20$ y la suma de las cifras en posición par es $P = 4+5 = 9$. Así, en la columna debe escribirse $20-9=11$.

**III PARTE:** Con base en los ejemplos de las tablas anteriores, determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas. En caso de ser falsa, aclare cuál de los números es un contraejemplo.

**1.** Si la última cifra de un número es $1$, el número es divisible por $11$

(Falso) El 8281 es un contraejemplo

**2.** Si la última cifra de un número es par, el número es divisible es par (divisible por $2$)

**3.** Si la última cifra de un número es $5$, el número es divisible por $5$

**4.** Si la última cifra de un número es $0$, el número es divisible por $5$

**5.** Si la última cifra de un número es divisible por $3$, el número es divisible por $3$

**6.** Si la suma de las cifras de un número es par, el número es divisible por $2$

**7.** Si la suma de las cifras de un número es divisible por $11$, el número es divisible por $11$

**8.** Si la suma de las cifras de un número es divisible por $3$, el número es divisible por $3$

**9.** Si la suma de las cifras de un número es divisible por $5$, el número es divisible por $5$

**10.** Si la expresión (*) es par, el número es divisible por $2$

**11.** Si la expresión (*) es divisible por $11$, el número es divisible por $11$

**12.** Si la expresión (*) es divisible por $3$, el número es divisible por $3$

**13.** Si la expresión (*) es divisible por $5$, el número es divisible por $5$

- Para determinar si un número es divisible por un número primo dado, podemos utilizar los siguientes criterios basados en probar la divisibilidad con números más pequeños relacionados con el número original.

| Criterios de divisibilidad para algunos **números primos** | | **Ejemplo** |
|---|---|---|
| **POR 2:** | Un número es divisible por $2$ si su último dígito es $0,2,4,6$ u $8$. | El número $3124$ es par, mientras que el número $12447$ es impar. |
| **POR 3:** | Un número es divisible por $3$ si la suma de sus dígitos es divisible por $3$. | En $1476$ la suma de los dígitos es $1+4+7+6=18$; como este número es divisible por $3$, entonces $1476$ es divisible por $3$. |
| **POR 5:** | Un número es divisible por $5$ si la última cifra es $5$ ó $0$. | El número $54345$ es divisible por $5$, mientras que $13228$ no lo es. |
| **POR 7:** | Para saber si un número es divisible por $7$ se debe hacer lo siguiente: Al número bórrele la última cifra. A lo que queda réstele el doble de la cifra que borró. Si este el resultado es divisible por $7$, el número original también lo es. | Para $371$, tenemos $37-2\cdot 1=37-2=35$ que sí es divisible entre $7$. En efecto, $371=7\cdot 53$. |
| **POR 11:** | Primero, enumere las cifras del número. Sea $I$ la suma de la primera, tercera,… todas las cifras en posición impar. Y sea $P$ la suma de la segunda, la cuarta.,… todas las cifras en posición par. Si $I-P$ ó $P-I$ es múltiplo de $11$ (incluyendo $0$), entonces el número original lo es. | Por ejemplo, para $\overset{1}{9}\overset{2}{1}\overset{3}{3}$, $I=9+1+3=12$ y $P=1$. Luego, $I-P=12-1=11$ que es múltiplo de $11$. En efecto, $913=11\cdot 83$. |

**EJEMPLO 1. Determine si los siguientes números son divisibles por el primo dado:**

a) $724354$ **por** $3$.

b) $12450$ **por** $5$.

c) $99128909$ **por** $11$.

d) $19306$ **por** $7$.

**EJEMPLO 2. Las secciones de sétimo año del colegio tienen las siguientes cantidades de estudiantes:**

| 7A | 7B | 7C |
|---|---|---|
| 35 | 28 | 42 |

**Se quieren hacer grupos para la feria científica de manera que en todos los grupos tengan la misma cantidad de estudiantes y que no se tenga que mezclar estudiantes de diferentes secciones.**

**¿Se puede hacer los grupos de 5 estudiantes? ¿Cuál sería el número de estudiantes más apropiado?**

**Soluciones B. (Primera Parte)**

**EJEMPLO 1: Determine si los siguientes números son divisibles por el primo dado:**

**a) $724354$ por $3$ .**

La suma de las cifras es $7+2+4+3+5+4=25$ y como este no es múltiplo de $3$ , el número original no lo es.

**b) $12450$ por $5$ .**

La última cifra es $0$ , por lo tanto, el número $12450$ sí es divisible por $5$ .

**c) $99128909$ por $11$ .**

Al enumerar las cifras, obtenemos $\overset{1}{9}\overset{2}{9}\overset{3}{1}\overset{4}{2}\overset{5}{8}\overset{6}{9}\overset{7}{0}\overset{8}{9}$ , las cifras en posición impar corresponden a $9,1,8$ y $0$ , y su suma es $I=9+1+8+0=18$ . Las cifras en posición par corresponden a $9,2,9$ y $9$ , y su suma es $P=9+2+9+9=29$ . Restaremos $P-I$ , ya que $P$ es mayor que $I$ .

Obtenemos, $P-I=29-18=11$ y como este número es múltiplo de $11$, $99128909$ es múltiplo de $11$.

**d) $19306$ por $7$ .**

La última cifra es $6$ entonces restamos $12$ del número que queda: $\begin{array}{r}1930\color{gray}{6}\\ -12\\ \hline 1918\end{array}$ . Repetimos el procedimiento con el número que queda: $\begin{array}{r}191\color{gray}{8}\\ -16\\ \hline 175\end{array}$ . De la misma manera, obtenemos $\begin{array}{r}17\color{gray}{5}\\ -10\\ \hline 7\end{array}$ .

Como $7$ es múltiplo de $7$ , entonces $19306$ sí es múltiplo de $7$ .

**EJEMPLO 2: Las secciones de sétimo año del colegio tienen las siguientes cantidades de estudiantes. Se quieren hacer grupos para la feria científica de manera que en todos los grupos tengan la misma cantidad de estudiantes y que no se tenga que mezclar estudiantes de diferentes secciones.**

| 7A | 7B | 7C |
|---|---|---|
| 35 | 28 | 42 |

**¿Se puede hacer los grupos de 5 estudiantes? ¿Cuál sería el número de estudiantes más apropiado?**

Las cantidades de estudiantes son $35,28$ y $42$, para que los grupos se puedan hacer de $5$ estudiantes, sería necesario que todos esos números fueran divisibles por $5$ , sin embargo, esto no es cierto: ni $28$ ni $42$ terminan en $0$ ó $5$ .

El número apropiado de estudiantes por grupo, sería un número que fuera divisor de las tres cantidades. En este caso verificamos que $7$ funciona, pues los números $35,28$ y $42$ son todos divisibles por $7$ .

- Para algunos números compuestos tenemos las siguientes reglas.

| Criterios de divisibilidad para algunos **números compuestos** | | **Ejemplo** |
|---|---|---|
| **POR 4:** | Un número es divisible entre $4$ si el número formado por sus últimos dos dígitos lo es. | El número $32\underline{16}$ es divisible por $4$ porque $16$ lo es. $215\underline{22}$ no es divisible por $4$. |
| **POR 8:** | Un número es divisible entre $8$ si el número formado por sus últimos tres dígitos lo es. | El número $57\underline{824}$ es divisible por $8$ porque $824$ lo es. $13\underline{308}$ no es divisible por $8$. |
| **POR 9:** | Un número es divisible entre $9$ si la suma de sus dígitos lo es. | Para el número $4374$ la suma de las cifras es $4+3+7+4=18$ y como $18$ es múltiplo de $9$, $4374$ también lo es. |

Otros criterios de divisibilidad se pueden deducir utilizando el siguiente principio:

> Si $a$ es divisible por $n$ y $a$ es divisible por $m$, donde $n$ y $m$ **no tienen factores en común,** entonces con certeza $a$ es divisible entre $n \cdot m$.

Entonces, por ejemplo, para que un número sea divisible entre $10$ es necesario que sea divisible entre $2$ y entre $5$, que al comparar los criterios de divisibilidad podemos establecer que para que un número sea divisible entre $10$ basta que su último dígito sea $0$.

Sin embargo, la condición "$n$ y $m$ **no tienen factores en común"** del principio anterior debe interpretarse con cuidado.

Por ejemplo, el número $12$ es divisible entre $6$ y también es divisible entre $4$, y esto no significa que sea divisible por $6 \cdot 4 = 24$. Esto sucede porque $6$ y $4$ sí tienen un factor en común ($2$).

**EJEMPLO 3. Determine si el número $1235$ es divisible entre $15$.**

**EJEMPLO 4. Determine si el número $4228$ es divisible entre $56$.**

**EJEMPLO 5. ¿Cuántos ceros tiene al final $25^3 \cdot 8^4$?**

**EJEMPLO 6. Si $a679b$ representa un número de cinco dígitos que es divisible por $72$, determine $a$ y $b$.**

**EJEMPLO 7. Marcelo dice que un carro es verdaderamente de su dueño, si el número de placa es divisibles por la fecha de nacimiento de su dueño. Carlos nació el 15 de setiembre y la placa de su carro es 87435, Ricardo nació el 9 de julio y su carro tiene placa 52133, mientras que Yorleny nació el 12 de diciembre y su carro tiene placa 64854. ¿Quiénes son, bajo el criterio de Marcelo, verdaderamente dueños de su carro?**

**Soluciones B. (Segunda Parte)**

**EJEMPLO 3: Determine si el número $1235$ es divisible entre $15$.**

Para que un número sea divisible por $15$ basta que sea divisible por $3$ y por $5$. Como el último dígito es $5$, el número es divisible por $5$. Así que necesitamos saber si el número es divisible por $3$. Al sumar las cifras obtenemos $1+2+3+5=11$ que no es múltiplo de $3$. Entonces, $1235$ no es divisible por $3$ ni por $15$

**EJEMPLO 4: Determine si el número $4228$ es divisible entre $56$.**

Como $7\cdot 8=56$ y estos números no tienen factores en común, analizaremos la divisibilidad por $7$ y $8$. . Los últimos tres dígitos del número son $228$ y este número no es divisible por $8$, y por lo tanto, es imposible que lo sea por $56$.

**EJEMPLO 5: ¿Cuántos ceros tiene al final $25^3\cdot 8^4$?**

Es importante ver que el número de ceros que tiene un número es igual a la cantidad de dieces que se puede formar. Para formar un diez necesitamos una multiplicación de un $2$ por un $5$.

La expresión $25^3\cdot 8^4=\left(5^2\right)^3\cdot\left(2^3\right)^4=5^6\cdot 2^{12}$. Así, podemos juntar los $6$ cincos, con $6$ dos, para obtener $6$ ceros:

$$5^6\cdot 2^{12}=\underbrace{5^6\cdot 2^6}_{10^6}\cdot 2^6=2^6\cdot 10^6=64000000.$$

**EJEMPLO 6: Si $a679b$ es un número de cinco dígitos que es divisible por $72$, determine $a$ y $b$.**

Como $a$ y $b$ son dígitos, así que su valor está entre $0$ y $9$. Sabemos que $a679b$ es divisible por $72$, pero $72$ es el producto de $8$ por $9$, así que el número es divisible por $9$ y también por $8$. La suma de las cifras es $a+6+7+9+b=a+b+22$, y entonces, $a+b$ es $5$ ó $14$. Por otro lado como $a679b$ es divisible por $8$, entonces sabemos que el número que se forma con sus últimas tres cifras también lo es, así $79b$ es divisible por $8$. Pero entre $790$ y $799$ solamente existe un número que es divisible por $8$ y es $792$. Por tanto $b=2$. Luego $a=3$ ó $a=12$, pero como $a$ es una cifra, entonces $a=3$.

**EJEMPLO 7: Marcelo dice que una persona es "verdaderamente dueño de su carro", si el número de placa es divisibles por la fecha de nacimiento de su dueño. Carlos nació el 15 de setiembre y la placa de su carro es 87435, Ricardo nació el 9 de julio y su carro tiene placa 52133, mientras que Yorleny nació el 12 de diciembre y su carro tiene placa 64854. ¿Quiénes son, bajo el criterio de Marcelo, verdaderamente dueños de su carro?**

Analizaremos si cada persona es "verdaderamente dueño de su carro"

Carlos: La fecha de nacimiento es $15$. El número $87435$ divisible por $5$, pero además, necesitamos saber si es divisible por $3$ para lo que sumamos las cifras del número: $8+7+4+3+5=27$ que sí es divisible por $3$. Entonces, el número $87435$ es divisible por $15$ y Carlos sí es verdaderamente dueño de su carro.

Para el caso de Ricardo, la suma de las cifras de $52133$ es $5+2+1+3+3=14$ que no es divisible por $9$ (su fecha de nacimiento), por lo que Ricardo no es verdaderamente dueño de su carro.

Por último, para el caso de Yorleny necesitaríamos que el número $64854$ fuera divisible por $12$, pero como no es divisible por $4$. Entonces, no es posible que lo sea. En resumen, solamente Carlos es "verdaderamente dueño de su carro"

**Ejercicio B. I PARTE:** En la siguiente tabla, utilice los criterios de divisibilidad para determinar si el número es divisible entre los factores de cada columna. (No utilice división)

| | Por $2$ | Por $3$ | Por $5$ | Por $7$ | Por $11$ | Por $4$ | Por $8$ | Por $9$ | Por $6$ | Por $10$ | Por $14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $126$ | | | | | | | | | | | |
| $880$ | | | | | | | | | | | |
| $189$ | | | | | | | | | | | |
| $91$ | | | | | | | | | | | |
| $901$ | | | | | | | | | | | |
| $1089$ | | | | | | | | | | | |
| $5005$ | | | | | | | | | | | |
| $792$ | | | | | | | | | | | |
| $102\,487$ | | | | | | | | | | | |

**II PARTE:** Conteste las siguientes preguntas. Si su respuesta es sí justifíquela, y si es no dé un contraejemplo

1. Si el número $n$ es divisible por $9$, ¿podemos asegurar que $n$ es divisible entre $3$?
2. Si el número $n$ es divisible por $14$, ¿podemos asegurar que $n$ es divisible entre $7$?
3. Si el número $n$ es divisible por $13$, ¿podemos asegurar que $n$ es divisible entre $26$?
4. Si el número $n$ es divisible por $15$ y es divisible por $10$, ¿podemos asegurar que $n$ es divisible entre $150$?
5. El criterio de divisibilidad por $4$ dice que basta considerar las últimas $2$ cifras. El criterio de divisibilidad por $8$ dice que basta considerar las últimas $3$ cifras. ¿Podemos establecer algún criterio de divisibilidad para $16$ basado en la observación anterior?

**III PARTE:** Resuelva los siguientes problemas

1. ¿Cuántos números se pueden formar con exactamente dos dígitos diferentes escogidos entre $0,1,2,3,4,5,6,7$ de manera que el número resultante sea divisible por **a)** $15$? **b)** ¿Y por $6$?

   (NOTA: el número $06=6$ no cuenta pues tiene un dígito nada más)

2. Cierta marca de galletes se vende en paquetes de $12$ galletas. Determine si es posible comprar paquetes de galletas de manera que cada persona coma la misma cantidad de galletas para una fiesta con:

   **a)** $212$ invitados

   **b)** $6252$ invitados

3. **a)** ¿Cuántos números enteros positivos menores que $100$ son divisibles por $6$?

   **b)** ¿Cuántos menores que $1000$?

   **c)** ¿Cuántos de los anteriores cumplen que la suma de los dígitos es $21$?

4. En una ganadería hay cierta cantidad de vacas, de manera que si se agrupan de grupos cinco en cinco, sobra una. Si se agrupan de seis en seis también sobra una, y si se agrupan de siete en siete también sobra una.

   **a)** Si la cantidad de animales es entre $200$ y $300$, ¿cuántos animales hay?

   **b)** Si la cantidad de animales es entre $400$ y $500$, ¿cuántos animales hay?

5. ¿De cuántas formas se puede reordenar los dígitos del número $4560$ de manera que el número resultante es divisible por $30$?

# C. Factorización prima única

Una de las principales utilidades es que los números primos son como unos ladrillos, que ayudan a construir todos los números naturales.

Así, pensemos en el caso del número $2000$, entonces podemos ver que $2000 = 200 \cdot 10$, pero cada uno de estos dos factores se puede descomponer en producto de números primos y finalmente podemos llegar a que $2000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^3$.

En general, tenemos:

**TEOREMA (Fundamental de la Aritmética)**
Todo número entero mayor que uno, se descompone en un producto de factores primos y además esta descomposición es única, si no se toma en cuenta el orden de los factores**.**

Así expresamos cualquier natural $n$, mayor que $1$, de la forma donde los enteros $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son primos distintos.

Cada número $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ es el exponente correspondiente a cada primo. Esta manera de escribir $n$ se denomina **factorización prima única**.

Para encontrar la factorización prima única debemos realizar sucesivamente divisiones **exactas** por número primos hasta obtener $1$.

Para esto, debemos recordar los criterios de divisibilidad que estudiamos anteriormente. A la hora de escribir la factorización prima utilizamos potencias.

Una de las aplicaciones más importantes de la factorización prima única, es que permite calcular de manera sencilla la cantidad de divisores positivos que tiene un número natural.

Por ejemplo, con $2646$ cuya factorización única es $2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, lo que debemos hacer es sumar uno a cada exponente y luego multiplicar los resultados.

$1+1=2, \quad 3+1=4, \quad 2+1=3$ y entonces, $2646$ tiene $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ divisiones positivos.

**(Número de divisores)**
Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ está escrito en su factorización prima única, el número de divisores de $n$ *es* $D(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.

**EJEMPLO 8. Encuentre la factorización prima única, y el número de divisores de:**

a) **54**
b) **98**
c) **243**
d) **200**
e) **91**
f) $\mathbf{242^4 \cdot 26^3}$

**EJEMPLO 9. ¿Cuáles números de tres dígitos tienen como producto de sus cifras $20$ ?**

**EJEMPLO 10. ¿Cuántos rectángulos diferentes tienen el largo y el ancho con longitudes enteras y el área igual a $42cm^2$ ?**

**EJEMPLO 11. En el grupo de 7A hay $20$ estudiantes. Un día cada uno de los estudiantes presentes (más de la mitad) dio la misma cantidad de monedas de ¢100 para comprar materiales. El dinero recogido fue ¢10500. ¿Cuántos estudiantes estuvieron ausentes?**

**Soluciones C.**

**EJEMPLO 8. Encuentre la factorización prima única y el número de divisores de:**

**a)** $54$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$54 = 2^1 \cdot 3^3$

$D(54) = (1+1)\cdot(3+1) = 8$

**b)** $98$

$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$98 = 2^1 \cdot 7^2$

$D(98) =$

$(1+1)\cdot(2+1) = 6$

**c)** $243$

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$243 = 3^5$

$D(243) = (5+1) = 6$

**d)** $200$

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$200 = 2^3 \cdot 5^2$

$D(200) =$

$(3+1)\cdot(2+1) = 12$

**e)** $91$

$$\begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$91 = 7 \cdot 13$

$D(91) = (1+1)\cdot(1+1) = 4$

**f)** $242^4 \cdot 26^3$ Para resolver este ejercicio debemos encontrar la factorización prima de cada una de las bases y luego utilizamos leyes de potencia para encontrar la factorización prima única.

Como $242 = 2 \cdot 11^2$ y $26 = 2 \cdot 13$, entonces, $242^4 \cdot 26^3 = \left(2 \cdot 11^2\right)^4 \cdot (2 \cdot 13)^3$ y al aplicar leyes de exponentes obtenemos $242^4 \cdot 26^3 = 2^4 \cdot 11^8 \cdot 2^3 \cdot 13^3 = 2^7 \cdot 11^8 \cdot 13^3$. Además, $D\left(242^4 \cdot 26^3\right) = D\left(2^7 \cdot 11^8 \cdot 13^3\right) = (7+1)\cdot(8+1)\cdot(3+1) = 288$.

- Para expresar cada factorización prima utilizamos potencias.

**EJEMPLO 9. ¿Cuáles números de tres dígitos tienen como producto de sus cifras $20$?**

El producto de los números debe ser $20$ y su factorización prima única es $2^2 \cdot 5$. Esto quiere decir que las únicas posibilidades para los dígitos son $1, 2, 4$ ó $5$, pues son los únicos divisores que aparecen. Los tríos pueden ser $1, 4, 5$ ó $2, 2, 5$ y las posibilidades son $145, 154, 415, 451, 514, 541$ o bien si hay dos $2$: $225, 252, 522$.

**EJEMPLO 10. ¿Cuántos rectángulos diferentes tienen el largo y el ancho con longitudes enteras y el área igual a $42cm^2$?**

Denotamos el largo con $l$ y el ancho con $a$. Suponemos que $a < l$ y como $l \cdot a = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Las posibilidades son $a = 1,\ l = 42$ , $a = 2,\ l = 21$ , $a = 3,\ l = 14$ y $a = 6,\ l = 7$

**EJEMPLO 11. En el grupo de 7A hay $20$ estudiantes. Un día cada uno de los estudiantes presentes (más de la mitad) dio la misma cantidad de monedas de ¢$100$ para comprar materiales. El dinero recogido fue ¢$10500$ ¿Cuántos estudiantes estuvieron ausentes?**

Sea $n$ el número de estudiantes y $m$ la cantidad de monedas que dio cada uno. Entonces, $n \cdot m = 105$. La factorización prima de $105$ es $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Como $n > 10$, entonces, $n$ tiene $3$ posibilidades: $3 \cdot 5 = 15,\ 3 \cdot 7 = 21,\ 5 \cdot 7 = 35$. La única que es menor que $20$ es $15$. Entonces, había $15$ estudiantes presentes y por lo tanto, $5$ ausentes.

**Ejercicio C.**

**I PARTE:** Encuentre la factorización prima única de cada uno de los siguientes números.

**1.** $18$
**2.** $54$
**3.** $87$
**4.** $256$
**5.** $92$
**6.** $108$
**7.** $720$
**8.** $2002$
**9.** $729$
**10.** $1998$
**11.** $480$
**12.** $1728$
**13.** $3125$
**14.** $845$
**15.** $848$
**16.** $2139$
**17.** $2008$
**18.** $(637)^2$
**19.** $301(602)^4$
**20.** $(18^2 \cdot 15)^3 \cdot (25 \cdot 4^3)^4$

**II PARTE:** Encuentre la cantidad de divisores positivos de los siguientes números.

**1.** $6$
**2.** $12$
**3.** $121$
**4.** $5$
**5.** $144$
**6.** $180$
**7.** $648$
**8.** $1331$
**9.** $255$
**10.** $p^4$: $p$ primo.
**11.** $p^5 \cdot q^7$: $p,q$ primos distintos.
**12.** $2^9 \cdot p^{12}$: $p$ primo impar.

**III PARTE:** Resuelva los siguientes problemas:

**1.** ¿Cómo describiría los números que tienen una cantidad **impar** de divisores?

**2.** Encuentre un número que no sea un cubo perfecto y la cantidad de divisores sea una unidad más que un múltiplo de 3, y mayor que 4.

**3.** ¿Cuántas parejas de números sin ceros cumplen que el producto de los números es $15000$?

**4.** Encuentre todos los rectángulos cuyos lados son un número natural que tienen área $60m^2$.

**5.** Yorleny hace regalos navidad dividiendo un paquete con cierta cantidad de chocolates, más de 10 y menos de 20, en bolsitas de manera que no le sobren y en cada bolsita haya la misma cantidad. Yorleny se dio cuenta de que podía hacer la repartición (bolsitas y cantidad de chocolates por bolsa) de exactamente tres formas. Encuentre la cantidad de chocolates que tiene el paquete.

**6.** Un teorema de la teoría de números dice que para cualquier número natural impar $n$ y que no termine en 5, existe un múltiplo de $n$ de la forma $\underbrace{111\ldots1}_{m\ unos}$, es decir, formado únicamente por unos. Encuentre un múltiplo de $9$ y uno de $21$ de esta forma.

**7.** La factorización prima única de un número es $n = p^3 \cdot q^2$, donde $p$ y $q$ representan números primos distintos ¿Cuáles son, en términos de $p$ y $q$, los divisores positivos de $n$?

**8.** ¿Cuántos números de cinco dígitos distintos, son divisibles por $5$ distintos y el producto de sus cifras es $210$?

## D. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Dados dos números naturales no nulos $a,b$, decimos que $d$ es un **divisor común** de $a$ y $b$ si $d$ es un divisor de $a$ y $d$ también es un divisor de $b$.

Cualesquiera dos números tienen a 1 como común divisor. Además, como un entero no nulo tiene un número finito de divisores, entonces, cualesquiera dos números tienen un número finito de comunes divisores.

Definimos el **máximo común divisor** de $a$ y $b$ (M.C.D.) como el mayor de todos los divisores comunes de $a$ y $b$

Existe una cantidad finita de divisores comunes de los números dados y todos ellos son divisores del M.C.D.

Para encontrar el **M.C.D.** de dos números

- Factorizamos los números, dividiendo únicamente por **factores comunes** entre los números.
- Multiplicamos los factores obtenidos.

**EJEMPLO 12. Encuentre el M.C.D. de cada una de las siguientes parejas de números:**

a) $150$ y $45$

b) $40$ y $8$

c) $12$ y $35$

d) $1200$ y $900$

**EJEMPLO 13. Un parque tiene forma triangular con lados $24m$, $32m$ y $16m$. Se desea colocar postes de luz alrededor del parque, tan distanciados como sea posible, pero que todos los postes estén a la misma distancia (entera) del siguiente. ¿Cuántos postes se deben colocar?**

Dados dos naturales no nulos $a,b$ decimos que $m$ es un **múltiplo común** de $a$ y $b$, si $m$ es múltiplo de $a$ y $m$ también es múltiplo de $b$.

Definimos el **mínimo común múltiplo** de $a$ y $b$ **(m.c.m)** como el menor de todos los múltiplos comunes de $a$ y $b$. Existe una cantidad infinita de múltiplos comunes los números y además, todos ellos son múltiplos del m.c.m.

Para encontrar el **m.c.m.** de dos números

- Factorizamos los números, dividiendo únicamente por **factores comunes** entre los números.
- Después, continuamos dividiendo por los factores que tengan los números que quedan hasta obtener 1.
- Multiplicamos todos los factores obtenidos.

**EJEMPLO 14. Encuentre el m.c.m. de cada una de las siguientes parejas de números:**

a) $28$ y $12$

b) $15$ y $44$

c) $6$ y $24$

d) $144$ y $75$

**EJEMPLO 15. María fue a la pulpería y compró cierta cantidad de chocolates a ¢40 cada uno. Su amigo Sergio con exactamente la misma cantidad de dinero que gastó María compró otra cantidad de chicles a ¢25 cada uno. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pudo gastar María?**

**Soluciones D.**

---

**EJEMPLO 12. Encuentre el M.C.D. de cada una de las siguientes parejas de números:**

**a) $150$ y $45$** **b) $40$ y $8$** **c) $12$ y $35$** **d) $1200$ y $900$**

a)

$$\begin{array}{cc|c} 150 & 45 & 3 \\ 50 & 15 & 5 \\ 10 & 3 & \end{array} \Big\rangle 15$$

$$MCD(150,45)=3\cdot 5$$
$$\Rightarrow MCD(150,45)=15$$

b)

$$\begin{array}{cc|c} 40 & 8 & 2 \\ 20 & 4 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & \end{array} \Big\rangle 8$$

$$MCD(40,8)=2\cdot 2\cdot 2$$
$$\Rightarrow MCD(40,8)=8$$

c)

$$\begin{array}{cc|c} 12 & 35 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow MCD(12,35)=1$$

d)

$$\begin{array}{cc|c} 1200 & 900 & 2 \\ 600 & 450 & 2 \\ 300 & 225 & 3 \\ 100 & 75 & 5 \\ 20 & 15 & 5 \\ 4 & 3 & \end{array} \Bigg\rangle 300$$

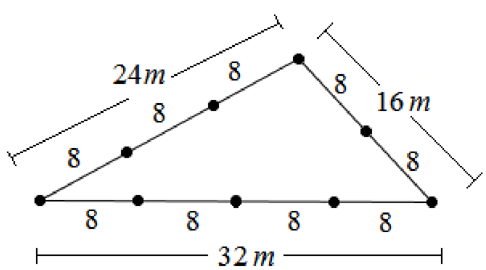
$$MCD(1200,900)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$$
$$\Rightarrow MCD(1200,900)=300$$

---

- Cuando uno de los números es múltiplo de otro, como en el ejemplo c), el M.C.D. es el menor de ellos.
- Observe que en este caso uno de los números es múltiplo de otro.
- Los números $12$ y $35$ no tienen divisores primos en común, y entonces, el M.C.D. es $1$ y cuando esto sucede decimos que los números son **primos relativos**.

---

**EJEMPLO 13. Un parque tiene forma triangular con lados $24\,m$, $32\,m$ y $16\,m$. Se desea colocar postes de luz alrededor del parque, tan distanciados como sea posible, pero que todos los postes estén a la misma distancia (entera) del siguiente. ¿Cuántos postes se deben colocar?**




La idea es dividir los tres lados en segmentos congruentes tan grandes como sea posible para colocar los postes en los extremos de esos segmentos.

La longitud de esos segmentos se encuentra con el M.C.D. de $24$, $32$ y $16$.

$$\begin{array}{ccc|c} 24 & 32 & 16 & 2 \\ 12 & 16 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \end{array} \Big\rangle 8$$

Como el M.C.D. es $8$ entonces cada poste está a $8\,m$ del siguiente.

Para determinar el número de postes que se deben colocar sobre cada lado debemos dividir cada una de las longitudes de los lados entre $8$.

Obtenemos: $\dfrac{24}{8}=3$, $\dfrac{32}{8}=4$ y $\dfrac{16}{8}=2$. En la figura, podemos ver que la cantidad de postes necesaria es $9$.

---

- Veamos que las divisiones realizadas en el último paso coinciden con los números que quedan a la hora de calcular el M.C.D.

**EJEMPLO 14. Encuentre el m.c.m. de cada una de las siguientes parejas de números:**

**a)** **28 y 12** **b)** **15 y 44** **c)** **6 y 24** **d)** **144 y 75**

a)

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 12 | 2 |
| 14 | 6 | 2 |
| 7 | 3 | 3 |
| 7 | 1 | 7 |
| 1 | 1 | |

Hasta aquí factores comunes

84

$$mcm(28,12)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7$$
$$\Rightarrow mcm(28,12)=84$$

b)

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 44 | 2 |
| 15 | 22 | 2 |
| 15 | 11 | 3 |
| 5 | 11 | 5 |
| 1 | 11 | 11 |
| | 1 | |

No hay factores comunes

660

$$mcm(15,44)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$$
$$\Rightarrow mcm(15,44)=660$$

c)

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 24 | 2 |
| 3 | 12 | 3 |
| 1 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | |

Hasta aquí factores comunes

24

$$mcm(6,24)=2\cdot 3\cdot 2\cdot 2$$
$$\Rightarrow mcm(6,24)=24$$

d)

| | | |
|---|---|---|
| 144 | 75 | 3 |
| 48 | 25 | 2 |
| 24 | 25 | 2 |
| 12 | 25 | 2 |
| 6 | 25 | 2 |
| 3 | 25 | 3 |
| 1 | 25 | 5 |
| 1 | 5 | 5 |
| | 1 | |

Hasta aquí factores comunes

3600

$$mcm(144,75)=3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$$
$$\Rightarrow mcm(144,75)=3600$$

---

- Cuando no hay factores comunes entre los números , como en el ejemplo b), el m.c.m se puede encontrar multiplicando los números: $15\cdot 44=660$

- Cuando uno de los números es múltiplo de otro, como en el ejemplo c), el m.c.m. es el mayor de ellos.

---

**EJEMPLO 15. María fue a la pulpería y compró cierta cantidad de chocolates a ₡$40$ cada uno. Su amigo Sergio con exactamente la misma cantidad de dinero que gastó María compró otra cantidad de chicles a ₡$25$ cada uno. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pudo gastar María?**

El cantidad de dinero que gastó María debe ser múltiplo de $40$ y también múltiplo de ₡$25$. Entonces, en realidad nos están preguntando por el mínimo común múltiplo de $40$ y $25$.

Como el m.c.m. de $40$ y $25$ es $200$ resulta que la mínima cantidad de dinero que llevaba María es de ₡$200$.

| | | |
|---|---|---|
| 40 | 25 | 5 |
| 8 | 5 | 2 |
| 4 | 5 | 2 |
| 2 | 5 | 2 |
| 1 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | |

200

**Ejercicio D.**

**I PARTE:** Encuentre el M.C.D. y el m.c.m de los siguientes grupos de números.

**1.** $5$ y $7$

**2.** $5$ y $15$

**3.** $30$ y $45$

**4.** $36$ y $20$

**5.** $144$ y $180$

**6.** $49$ y $25$

**7.** $23$ y $16$

**8.** $100$, $220$ y $300$

**9.** $351$, $234$ y $312$

**10.** $a$ y $b$, donde $a$ y $b$ no tienen factores en común.

**11.** $a$ y $b$, donde $a$ es múltiplo de $b$.

**12.** $a$ y $b$, donde $a$ y $b$ son primos distintos.

---

**II PARTE:** Resuelva los siguientes problemas.

**1.** Una pizza tiene $4$ pedazos y otra del mismo tamaño tiene $6$. Se deben dividir los pedazos de cada una para que todos tengan el mismo tamaño, queriendo que sea el más grande posible. ¿Cuántos pedazos en total se pueden obtener?

**2.** Una rana recorre $15cm$ por salto, mientras que una pulga $24cm$ por salto. Si empiezan a brincar desde el mismo lugar, ¿a cuántos **decímetros** la rana pasa por un lugar donde ya pasó la pulga?


**3.** Un letrero se enciende y apaga cada 34 segundos y otro cada se enciende y apaga cada 51 segundos, si ambos se encendieron a las 3:59. ¿A qué hora, exactamente, volverán a estar encendidos simultáneamente?

**4.** En la sección 7A hay $24$ estudiantes, mientras que en la sección 7B hay $36$ estudiantes. Se desea dividir a cada sección en grupos tan grandes como sea posible, de manera que la cantidad de estudiantes en los grupos del 7A sea la misma que la cantidad de estudiantes en los grupos del 7B. ¿Cuántos grupos se forman entre las dos secciones?

**5.** En cierto país se utilizan monedas únicamente de $15$ y de $12$.

**a)** ¿Cuál es la menor cantidad que se puede pagar utilizando únicamente monedas de $12$ o bien utilizando únicamente monedas de $15$?

**b)** El precio de un artículo es $33$. Encuentre una manera en que se puede pagar esa cantidad (dando vuelto).

**c)** Justifique que es imposible lograr pagar, incluso dando vuelto, un artículo que cuesta $44$.

**6.** En una carrera de 50 km hay un puesto de agua cada 4 km y un control de los corredores cada 3 km. ¿En qué puntos kilométricos coincidirán el puesto de agua y el control?

**7.** Por una misma parada pasan los autobuses de la línea A cada 5 min y los de la línea B cada 8 min. A las doce en punto han coincidido los de las dos líneas. ¿A qué hora volverán a coincidir?

**8.** Con el número de alumnos que tiene una clase se pueden formar equipos de 3, de 4 o de 6 miembros, sin que ningún alumno se quede sin equipo. ¿Cuántos alumnos tiene como mínimo dicha clase?

**9.** Se han hecho dos torres de cajas con la misma altura. Si una de las torres está formada por cajas de 15 cm de alto y la otra por cajas de 20 cm de alto, ¿qué altura han alcanzado como mínimo las dos?

**10.** Un grupo de 6 amigos va a una pizzería. Las pizzas vienen dividas en 8 porciones y todos quieren tomar el mismo número de porciones, ¿cuántas pizzas tienen que pedir cómo mínimo?

**11.** Jaime cuenta sus cómic de 2 en 2, de 4 en 4 y de 6 en 6, y en ningún caso le sobra ninguno. ¿Cuántos cómics tiene Jaime si posee entre 30 y 40?

**12.** ¿Cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño que se puede formar con fichas rectangulares de 12 cm de largo y 8 cm de ancho?

**13.** ¿Se te ocurre alguna forma rápida de averiguar el máximo común divisor de dos números a partir de los divisores del menor de ellos?

**14.** Hay que colocar en cajas 24 botellas de refresco de naranja y 60 de limón, de manera que en todas las cajas

haya el mismo número de unidades y que no se mezclen en una misma caja botellas de los dos sabores. ¿Cuál es el número máximo de botellas que pueden contener las cajas?

**15.** Se dispone de tres trozos de madera que miden 90 cm, 120 cm y 150 cm de longitud, respectivamente. Si se quieren cortar los tres trozos en pedazos del mismo tamaño:

**a)** ¿Cuánto puede medir cada pedazo como máximo?

**b)** ¿Cuántos pedazos saldrán de cada trozo original?

**16.** Marta tiene 30 caramelos de fresa y 45 de menta. Los quiere empaquetar en bolsas, de manera que todas tengan la misma cantidad de caramelos de cada tipo. Si quiere preparar el mayor número de bolsas sin que le sobre ningún caramelo:

**a)** ¿Cuántas bolsas obtendrá?

**b)** ¿Qué composición tendrá cada bolsa?

---

**III PARTE:** Un procedimiento alternativo para encontrar el M.C.D. y m.c.m se basa en la propiedad que se descubrirá a continuación con respecto a las factorizaciones primas. Para los números $14000$ y $13500$ tenemos:

| | Número | Factorización prima | Exponente de 2 | Exponente de 3 | Exponente de 5 | Exponente de 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $a = 14\ 000$ | $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ | 4 | 0 | $\square$ | $\square$ |
| **2.** | $b = 13\ 500$ | $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ | $\square$ | 3 | 3 | $\square$ |
| **3.** | $a \cdot b =$ | | | | | |
| **4.** | M.C.D = $500$ | $2^2 \cdot 5^3$ | 2 | $\square$ | $\square$ | 0 |
| **5.** | m.c.m = $378000$ | $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ | $\square$ | $\square$ | 3 | 1 |
| **6.** | M.C.D · m.c.m= | | | | | |

**1.** Complete correctamente la tabla.

**2.** Para cada uno de los factores primos que están en las factorizaciones, ¿qué relación puede ver entre los exponentes del M.C.D. y los exponentes de los números?

**3.** Para cada uno de los factores primos que están en las factorizaciones, ¿qué relación puede ver entre los exponentes del m.c.m. y los exponentes?

**4.** En las filas 3. y 5. de la tabla anterior complete las multiplicaciones utilizando leyes de potencia, y la información respectiva.

**5.** Compare los resultados en las filas que llenó y concluya a qué es igual el producto del M.C.D. y el m.c.m. de dos números.

**6.** Utilice el método para encontrar el M.C.D. y el m.c.m. de $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 11^5$ y $2^8 \cdot 11^8 \cdot 13^2$

**7.** Exprese en su factorización prima única el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $(225)^4 \cdot 124$ y $12 \cdot 20^8 \cdot 9^{11}$

**8.** Encuentre todas las parejas de números cuyo máximo común divisor es $12$ y mínimo común múltiplo es $180$.

**9.** El producto de dos números es $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^7$ y el máximo común divisor es $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. ¿Cuáles podrían ser los números?

**10.** Sea $d$ el máximo común divisor de los números $a$ y $b$ ¿Cuánto sería el máximo común divisor de los números $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$? Realice algunos cálculos números, y luego elabore un argumento para justificarlo.

# **AUTOEVALUACIÓN** Teoría de Números

**Selección única**

**Divisibilidad**

**1)** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

**i)** Cero es un factor de todo número natural

**ii)** Cuatro es múltiplo de veinticuatro

**iii)** Todo número natural es un divisor de 1.

A) Todas

B) Ninguna

C) Solamente II

D) II y III

**2)** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

**i)** Todos los números primos son impares

**ii)** Cero es múltiplo de cualquier número natural

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solamente I

D) Solamente II

**3)** El número de primos menores que $20$ es:

A) $5$

B) $7$

C) $4$

D) $8$

**4)** La cantidad de números primos mayores que $10$ y menores que $20$ es:

A) $4$

B) $5$

C) $3$

D) $6$

**5)** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

**i)** El producto de dos números primos es un número compuesto.

**ii)** El resultado de dividir un número compuesto por uno primo es un número primo.

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solamente I

D) Solamente II

**6)** Suponga que se tienen tres números $a,b,c$ tales que $a$ es un divisor de $b$ y $b$ es un divisor de $c$. Entonces, con certeza:

A) $a$ es un divisor de $c$

B) $c$ es un divisor de $a$

C) $a \cdot b$ es un divisor de $c$

D) $a+b$ es un divisor de $c$

**7)** El resultado de sumar un número par y un número par, es con certeza:

A) Un número par

B) Un número impar

C) Un múltiplo de tres

D) Un múltiplo de cinco

**8)** El resultado de sumar dos número primos impares es con certeza:

A) Un número múltiplo de 3

B) Un número par

C) Un número impar y primo

D) Un número impar y compuesto

**Criterios de divisibilidad**

**9)** De los siguientes números, ¿cuál es divisible por $9$?

A) $1234$

B) $3415$

C) $4563$

D) $2466$

**10)** De los siguientes números, ¿cuál es divisible por $7$?

A) $2563$

B) $1653$

C) $4704$

D) $1304$

**11)** De los siguientes números, ¿cuál es divisible por $11$?

A) $1254$

B) $3477$

C) $5534$

D) $7197$

**12)** De los siguientes números, ¿cuál es divisible por $15$?

A) $1236$

B) $2265$

C) $5005$

D) $1055$

**Factorización prima única**

**13)** La factorización prima única de $2015$ es:

A) $5\cdot 3\cdot 101$

B) $5\cdot 403$

C) $5\cdot 13\cdot 31$

D) $2015$

**14)** La factorización prima única de $720$ es:

A) $16\cdot 5\cdot 9$

B) $2^2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5$

C) $2^4\cdot 3^2\cdot 5$

D) $2^4\cdot 9\cdot 5$

**15)** ¿Cuántos divisores tienen $675$?

A) $6$

B) $8$

C) $10$

D) $12$

**16)** ¿Cuál de los siguientes números tiene $11$ divisores?

A) $3^{11}\cdot 5$

B) $4^{10}$

C) $11^{10}$

D) $3^6\cdot 5^5$

**MCD y mcm**

**17)** El m.c.m. y el M.C.D. de 36 y 45 son respectivamente:

A) $9$ y $180$

B) $180$ y $9$

C) $1$ y $1620$

D) $1620$ y $1$

**18)** El mínimo común múltiplo de $100,\ 36,\ 20$ es:

A) $2$

B) $4$

C) $900$

D) $72000$

**19)** El M.C.D. de $98, 42, 56$ es

A) $2$

B) $14$

C) $168$

D) $1176$

**20)** Luis y Andrea corren alrededor de una pista, cada uno de ellos corre con velocidad constante: Luis corre 5 vueltas en 12 minutos, mientras que Andrea corre 3 vueltas en 10 minutos. Cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Luis notó que había pasado una cantidad entera de minutos. El total de vueltas que dieron entre los dos es:

A) $43$

B) $86$

C) $90$

D) $135$

**21)** Una varilla que mide $90cm$ y otra que mide $72cm$ se utilizarán para medir objetos en una unidad que llamaremos "unidad especial". Se quiere que esta unidad especial sea un número natural de centímetros, que sea lo más grande posible, y que ambas varillas contengan un número natural de unidades especial. Entonces, una unidad especial mide:

A) $9cm$

B) $18cm$

C) $36cm$

D) $360cm$